DOI：10. 13471/j. cnki. acta. snus. 2015. 04. 008

分数阶半线性脉冲微分方程解的振动性*

芦　伟[1]，高　洁[2]，王群芳[1]
（1. 宿州学院数学与统计学院，安徽 宿州 234000；
2. 潍坊学院数学与信息科学学院，山东 潍坊 261061）

摘　要：研究了带阻尼项的半线性分数阶脉冲微分方程解的振动性，通过使用一个特殊的脉冲不等式和 Riccati 技巧，得到分数阶脉冲方程解的振动性的若干个充分条件并用一个例子验证了主要定理。所做的工作是 Riccati 技巧的应用在新的领域上的推广。

关键词：分数阶微分方程；脉冲；半线性；阻尼项；振动性

中图分类号：O175. 1　　**文献标志码：**A　　**文章编号：**0529－6579（2015）04－0043－06

Oscillation of Half-Linear Fractional Impulsive Differential Equations

LU Wei[1]，*GAO Jie*[2]，*WANG Qunfang*[1]
（1. School of Mathematics and Statistics，Suzhou University，Suzhou 234000，China；
2. School of mathematics and information science，Weifang University，Weifang 261061，China）

Abstract：The oscillation for a class of semi-linear fractional impulsive differential equations with damping is studied. By means of the impulsive inequality and the generalized Riccati transformation，some new oscillation criteria are obtained for all solutions to the equation. An example is given to illustrate the results. This is the generalization of the application of Riccati technique in new field.

Key words：fractional differential equation；impulse；half-linear；damping term；oscillation

近年来，国际上每年发表的涉及分数阶微积分的研究论文超过 500 篇，相关的理论研究与应用几乎渗入所有学科和应用领域[1－5]。尤其是分数阶微分方程的研究在反常扩散、多孔介质力学、非牛顿流体力学、黏弹性力学、软物质力学、生物医学、系统控制等领域越来越显示其强大的应用前景。脉冲的引入将为分数阶微分方程的应用开辟新的途径，可以更广泛的应用在经济数学的风险防控和生物数学的病虫害防治的模型中，因此对分数阶微分方程振动性的研究已引起一些学者的关注[6－8]，而对分数阶脉冲微分方程振动性的研究是一个新的课题。所以我们研究的问题具有很好的理论价值。本文利用 Riccati 变换技巧[9－11]，研究了如下带阻尼项的分数阶脉冲方程

$$\begin{cases} (r(t)\Phi_\gamma(D_-^\alpha y)(t))' + p(t)\Phi_\gamma(D_-^\alpha y)(t) = \\ \qquad q(t)f(\int_t^\infty (v-t)^{-\alpha}y(v)\mathrm{d}v), t \neq t_k, \\ y(t_k^+) = g_k(y(t_k)), (D_-^\alpha y)(t_k^+) = \\ \qquad h_k((D_-^\alpha y)(t_k)), k = 1,2,3,\cdots, \\ y(t_0^+) = y_0, (D_-^\alpha y)(t_0^+) = (D_-^\alpha y)(t_0) \end{cases} \tag{1}$$

这里 $t \geqslant t_0, 0 < t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_k < \cdots, \lim\limits_{k\to\infty} t_k = \infty$，常数 $\alpha \in (0,1), \Phi_\gamma(u) = |u|^{\gamma-1}u, \gamma$ 是正的奇数比。$D_-^\alpha y$ 是 y 的 α 阶 Liouville 右侧分数阶微分，

* **收稿日期：**2014－08－19
基金项目：安徽省教育厅资助项目（KJ2012A265，2013zdjy151）；宿州学院资助项目（2014XJHB07；2014XJZY01）；山东省自然科学基金资助项目（ZR2011AL008）；国家大学生资助项目（201310379006）
作者简介：芦伟（1964 年生），男；**研究方向：**泛函微分方程；E-mail：luwei6118@hotmail.com

记为

$$(D_-^\alpha y)(t):=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_t^\infty (v-t)^{-\alpha}y(v)\mathrm{d}v$$

其中 $\Gamma(t):=\int_0^\infty v^{t-1}\mathrm{e}^{-v}\mathrm{d}v, t\in\mathbf{R}^+$ 是通常的 Gamma 函数。$y(t_k^+)$ 和 $y(t_k^-)$ 存在并满足 $y(t_k^-)=y(t_k)$ 及 $y'(t_k)=y'(t_k^-)=\lim\limits_{h\to0^-}\dfrac{y(t_k+h)-y(t_k)}{h}$ 和 $y'(t_k^+)=\lim\limits_{h\to0^+}\dfrac{y(t_k+h)-y(t_k^+)}{h}$。

对于没有脉冲且是整数阶的半线性微分方程的振动性，文［11］给出了详细的研究。对于没有脉冲而带阻尼项的非线性分数阶微分方程，文［8］给出了一些振动性的充分条件。如果既没有脉冲又没有阻尼项且 $\gamma=1$，则方程（1）可简化为文［6］研究的方程，即

$$(r(t)(D_-^\alpha y)(t))'-q(t)f\left(\int_t^\infty (v-t)^{-\alpha}y(v)\mathrm{d}v\right)=0 \tag{2}$$

1 若干定义

本文中的空间定义为 $PLC(J):=\{x:J\to\mathbf{R}$ 在每个区间 (t_i,t_{i+1}) 上是连续的，$x(t_i^+)$ 存在，$x(t_i^-):=x(t_i), i\in\mathbf{N}, J\in\mathbf{R}\}$。空间 $PLC^1(J)$ 按照通常的方法定义。

为了方便研究，我们约定以下条件

(H1) $r(t)$，$p(t)$ 和 $q(t)$ 都是区间 $[t_0,\infty]$ 上正的连续函数；

(H2) 函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 对于 $u\neq0$ 和常数 $\kappa>0$ 有 $f(u)/u^\gamma>\kappa$；

(H3) $g_k, h_k\in PLC(\mathbf{R},\mathbf{R})$ 且存在正常数 a, b_k^* 使得

$$\frac{g_k(u)}{u}\leqslant a,\quad \frac{h_k(u)}{u}\geqslant b_k^*>0,$$
$$u\neq0,\quad 0<a\leqslant1, k=1,2,\cdots$$

如果（1）的解既不是最终为正也不是最终为负的，则称它是振动的；否则的话称它为非振动的。如果方程（1）的每个解都是振动的，则方程（1）是振动的。

分数阶微积分有很多定义，本文使用如下刘维尔右侧分数阶微积分定义。

定义 1[1] 假设函数 $g:\mathbf{R}_+\to\mathbf{R}$ 在 $\mathbf{R}_+$ 上是逐点定义的，则它在右半轴上的 $\beta>0$ 阶刘维尔右侧分数积分定义为

$$(I_-^\beta g)(t):=\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_t^\infty (v-t)^{\beta-1}g(v)\mathrm{d}v \tag{3}$$

其中 $t>0$。

定义 2[1] 假设函数 $g:\mathbf{R}_+\to\mathbf{R}$ 在 $\mathbf{R}_+$ 上是逐点定义的，则它在右半轴上的 $\beta>0$ 阶刘维尔右侧分数微分定义为

$$(D_-^\beta g)(t):=(-1)^{[\beta]}\frac{\mathrm{d}^{[\beta]}}{\mathrm{d}t^{[\beta]}}(I_-^{[\beta]-\beta}g)(t)=$$
$$(-1)^{[\beta]}\frac{1}{\Gamma([\beta]-\beta)}\frac{\mathrm{d}^{[\beta]}}{\mathrm{d}t^{[\beta]}}\int_t^\infty (v-t)^{\beta-1}g(v)\mathrm{d}v \tag{4}$$

其中 $t>0$，$[\beta]:=\min\{z\in\mathbf{Z}:z\geqslant\beta\}$。

本文考虑以下两种情况：

$$\int_{t_j}^t \prod_{t_j<t_k<u} b_k^*\left(r(u)\mathrm{e}^{\int_{t_0}^u (p(s)/r(s))\mathrm{d}s}\right)^{-\frac{1}{\gamma}}\mathrm{d}u=\infty \tag{5}$$

和

$$\int_{t_j}^t \prod_{t_j<t_k<u} b_k^*\left(r(u)\mathrm{e}^{\int_{t_0}^u (p(s)/r(s))\mathrm{d}s}\right)^{-\frac{1}{\gamma}}\mathrm{d}u<\infty \tag{6}$$

2 主要结果

引理 1[6] 对于 $\alpha\in(0,1)$，$t>0$ 定义函数

$$G(t):=\int_t^\infty (v-t)^{-\alpha}y(v)\mathrm{d}v \tag{7}$$

则

$$G'(t):=-\Gamma(1-\alpha)(D_-^\alpha y)(t) \tag{8}$$

引理 2[12] 假设 $m\in PLC^1(\mathbf{R}_+,\mathbf{R})$，并且在 $t_k(k=1,2,\cdots)$ 上是左连续的。如果

(A_0) $m'(t)\leqslant p(t)m(t)+q(t), t\neq t_k, k=1,2,\cdots$,

(A_1) $m(t_k^+)\leqslant d_k m(t_k)+b_k$，则当 $t\geqslant t_0$ 时，有

$$m(t)\leqslant m(t_0)\prod_{t_0<t_k<t} d_k\exp\left(\int_{t_0}^t p(s)\mathrm{d}s\right)+$$
$$\sum_{t_0<t_k<t}\left(\prod_{t_0<t_j<t} d_j\exp\left(\int_{t_k}^t p(s)\mathrm{d}s\right)\right)b_k+$$
$$\int_{t_0}^t \prod_{s<t_k<t} d_k\exp\left(\int_s^t p(\sigma)\mathrm{d}\sigma\right)q(s)\mathrm{d}s \tag{9}$$

引理 3[13] 假设 X 和 Y 都是非负数，则有

$$X^\lambda+(\lambda-1)Y^\lambda-\lambda XY^{\lambda-1}\geqslant0, \lambda>1$$

当且仅当 $X=Y$ 时等式成立。

引理 4 假设条件（H1）、（H2）、（H3）和式（5）成立并且 $y(t)$ 是方程（1）的正解，则存在 $T\geqslant t_0$ 满足当 $t\in[T,\infty)$ 时，有

$$(D_-^\alpha y)(t)<0 \text{ 和 } (r(t)\Phi_\gamma(D_-^\alpha y)(t))'>0 \tag{10}$$

证明 因为 $y(t)$ 是方程（1）的一个正解，由 $G(t)$ 的定义，存在 $t_1\geqslant t_0$ 满足当 $t\in[t_1,\infty)$ 时有

$$y(t)>0 \text{ 和 } G(t)>0 \tag{11}$$

由条件（H1）和（H2）知 $q(t)>0, f(G(t))>0$。根据方程（1）当 $t>t_1, t\neq t_k, k=1,2,\cdots$ 时有

$$(r(t)\Phi_\gamma(D_-^\alpha y)(t))' + p(t)\Phi_\gamma(D_-^\alpha y)(t) = q(t)f\left(\int_t^\infty (v-t)^{-\alpha}y(v)\mathrm{d}v\right) > 0 \quad (12)$$

令 $x(t)=r(t)\Phi_\gamma(D_-^\alpha y)(t)$，推出 $x'(t)+\frac{p(t)}{r(t)}x(t)>0$ 进而得到 $(x(t)\mathrm{e}^{\int_{t_0}^t (p(s)/r(s))\mathrm{d}s})'>0$，则存在 $T_1>t_1$ 满足当 $t\geqslant T_1$ 时有 $x(t)\mathrm{e}^{\int_{t_0}^t (p(s)/r(s))\mathrm{d}s}$ 是严格增函数，并知 $x(t)$ 在 $t\in(t_k,t_{k+1}], t_k>T_1$ 上最终定号。根据 $r(t)>0$ 和 γ 是正的奇数比，由条件（H3）可知 $(D_-^\alpha y)(t)$ 也是最终定号的。下面证明

$$(D_-^\alpha y)(t)<0, t\in[T_1,\infty) \quad (13)$$

假设式（13）不成立，则存在 $t_j\geqslant T_1$ 使得当 $t\in[t_j,\infty), t_j>T_1$ 时有

$$(D_-^\alpha y)(t_j)>0 \text{ 和 } (D_-^\alpha y)(t)>0$$

当 $t\in(t_j,t_{j+1}]$ 时，由条件（H3）和 $x(t)\mathrm{e}^{\int_{t_0}^t (p(s)/r(s))\mathrm{d}s}$ 是单调增的，有

$$r(t)((D_-^\alpha y)(t))^\gamma \mathrm{e}^{\int_{t_0}^t (p(s)/r(s))\mathrm{d}s} \geqslant r(t_j^+)((D_-^\alpha y)(t_j^+))^\gamma \mathrm{e}^{\int_{t_0}^t (p(s)/r(s))\mathrm{d}s} \geqslant r(t_j^+)(b_j^*(D_-^\alpha y)(t_j))^\gamma \mathrm{e}^{\int_{t_0}^t (p(s)/r(s))\mathrm{d}s} := (b_j^*)^\gamma C \quad (14)$$

这里 $C=r(t_j)((D_-^\alpha y)(t_j))^\gamma \mathrm{e}^{\int_{t_0}^t (p(s)/r(s))\mathrm{d}s}>0$。因此

$$(D_-^\alpha y)(t) \geqslant b_j^* C^{1/\gamma}(r(t)\mathrm{e}^{\int_{t_0}^t (p(s)/r(s))\mathrm{d}s})^{-1/\gamma}, t\in(t_j,t_{j+1}]$$

类似地

$$(D_-^\alpha y)(t) \geqslant b_j^* b_{j+1}^* C^{1/\gamma}(r(t)\mathrm{e}^{\int_{t_0}^t (p(s)/r(s))\mathrm{d}s})^{-1/\gamma}, \quad t\in(t_{j+1},t_{j+2}]$$

由归纳法得

$$(D_-^\alpha y)(t) \geqslant \prod_{i=0}^n b_{j+i}^* C^{1/\gamma} \cdot (r(t)\mathrm{e}^{\int_{t_0}^t (p(s)/r(s))\mathrm{d}s})^{-1/\gamma}, t\in(t_{j+n},t_{j+n+1}]$$

由式（8）有

$$-\frac{G'(t)}{\Gamma(1-\alpha)} = (D_-^\alpha y)(t) \geqslant \prod_{i=0}^n b_{j+i}^* C^{1/\gamma}\left(r(t)\mathrm{e}^{\int_{t_0}^t (p(s)/r(s))\mathrm{d}s}\right)^{-1/\gamma}, \quad t\in(t_{j+n},t_{j+n+1}], n\in\mathbf{N}$$

进一步有

$$G'(t) \leqslant -\Gamma(1-\alpha)\cdot \prod_{i=0}^n b_{j+i}^* C^{1/\gamma}\left(r(t)\mathrm{e}^{\int_{t_0}^t (p(s)/r(s))\mathrm{d}s}\right)^{-1/\gamma} < 0 \quad (15)$$

因而 $G(t)$ 在每个 $t\in(t_{j+n},t_{j+n+1}]$ 上是单调减的。由条件（H3）知

$$G(t_{k+1}^+) \leqslant aG(t_{k+1}) \leqslant G(t_{k+1}) < G(t_k^+) \leqslant aG(t_k) < G(t_k), k=j,j+1,j+2,\cdots \quad (16)$$

故在 $t\in[t_j,\infty)$ 上应用引理 2 得，当 $t\in[t_j,\infty)$ 时

$$G(t) \leqslant G(t_j^+) - \int_{t_j}^t \Gamma(1-\alpha)\prod_{t_j<t_k<u} b_k^* C^{1/\gamma}\left(r(u)\mathrm{e}^{\int_{t_0}^u (p(s)/r(s))\mathrm{d}s}\right)^{-1/\gamma}\mathrm{d}u \leqslant G(t_j^+) - \Gamma(1-\alpha)C^{1/\gamma}\int_{t_j}^t \prod_{t_j<t_k<u} b_k^*\left(r(u)\mathrm{e}^{\int_{t_0}^u (p(s)/r(s))\mathrm{d}s}\right)^{-1/\gamma}\mathrm{d}u \quad (17)$$

因为 $G(t)>0, t\geqslant t_j$ 但是当 $t\to\infty$ 时，由条件（5）知（17）式的右边小于零，这是一个矛盾。因此，存在 $T=t_j\geqslant t_0$ 满足 $(D_-^\alpha y)(t)<0, t\in[T,\infty)$。由方程（1）得 $(r(t)\Phi_\gamma(D_-^\alpha y)(t))'>0, t\in[T,\infty)$。证毕！

定理 1　设条件（H1）、（H2）、（H3）和式（5）成立，并且存在一个正的可微函数 $\eta(t)$ 满足

$$\limsup_{t\to\infty}\int_T^t \prod_{T<t_k<s}(b_k^*)^\gamma\left[\kappa\eta(s)q(s) - \frac{r(s)\eta(s)(\psi(s))_+^{\gamma+1}}{(\gamma+1)^{\gamma+1}(\Gamma(1-\alpha))^\gamma}\right]\mathrm{d}s = \infty \quad (18)$$

则方程（1）是振动的。这里 $\psi(s)=\frac{\eta'(s)}{\eta(s)}-\frac{p(s)}{r(s)}$ 且 $(\psi(s))_+=\max\{0,\psi(s)\}, s\geqslant T\geqslant t_0$。

证明　反证法，假设 $y(t), t\geqslant T\geqslant t_0$ 是方程（1）的一个最终非振动解。不失一般性，假设 $y(t)$ 是方程（1）的一个最终正解。根据引理 4 知道 $(D_-^\alpha y)(t)<0$ 且 $(r(t)\Phi_\gamma(D_-^\alpha y)(t))'>0, t\in[T,\infty)$。定义函数 $w(t)$ 如下

$$w(t) := -\eta(t)\frac{r(t)\Phi_\gamma((D_-^\alpha y)(t))}{\Phi_\gamma(G(t))} \quad (19)$$

这里 $G(t)$ 同前定义，则 $w(t)>0$ 且 $w(t_k^+)>0, t\in(t_k,t_{k+1}], t_k\geqslant T\geqslant t_0, k=1,2,\cdots$。由方程（1），当 $t\neq t_k, t_k\geqslant T$ 时，可得

$$w'(t) = -\eta'(t)\left[\frac{r(t)\Phi_\gamma(D_-^\alpha y)(t)}{\Phi_\gamma(G(t))}\right] - \eta(t)\left[\frac{r(t)\Phi_\gamma(D_-^\alpha y)(t)}{\Phi_\gamma(G(t))}\right]' = \left(\frac{\eta'(t)}{\eta(t)}-\frac{p(t)}{r(t)}\right)w(t) - \frac{\eta(t)q(t)f(G(t))}{(G(t))^\gamma} + \frac{\eta(t)r(t)\Phi_\gamma(D_-^\alpha y)(t)}{(\Phi_\gamma(G(t)))^2} \leqslant \left(\frac{\eta'(t)}{\eta(t)}-\frac{p(t)}{r(t)}\right)w(t) - \kappa\eta(t)q(t) -$$

$$\frac{\eta(t)r(t)((D_-^\alpha y)(t))^\gamma[\Gamma(1-\alpha)(D_-^\alpha y)(t)]}{(G(t))^{\gamma+1}} \leqslant$$
$$-\kappa\eta(t)q(t)+\left(\frac{\eta'(t)}{\eta(t)}-\frac{p(t)}{r(t)}\right)w(t)-$$
$$\gamma\Gamma(1-\alpha)[\eta(t)r(t)]^{-1}w^{1+1/\gamma}(t)\leqslant$$
$$-\kappa\eta(t)q(t)+(\psi(t))_+w(t)-$$
$$\frac{1}{\lambda-1}\Gamma(1-\alpha)[\eta(t)r(t)]^{1-\lambda}w^\lambda(t) \qquad (20)$$

这里 $\lambda=\dfrac{\gamma+1}{\gamma},\psi(t)=\dfrac{\eta'(t)}{\eta(t)}-\dfrac{p(t)}{r(t)}$。

$$令\ X=\left[\frac{\Gamma(1-\alpha)}{(\lambda-1)(\eta(t)r(t))^{\lambda-1}}\right]^{\frac{1}{\lambda}}w(t),$$
$$Y=\left[\frac{(\psi(t))_+}{\lambda}\left(\frac{(\lambda-1)(\eta(t)r(t))^{\lambda-1}}{\Gamma(1-\alpha)}\right)^{\frac{1}{\lambda}}\right]^{\frac{1}{\lambda-1}}$$

在式（20）中使用引理 3 得

$$w'(t)\leqslant-\kappa\eta(t)q(t)+$$
$$\frac{r(t)\eta(t)(\psi(t))_+^{\gamma+1}}{(\gamma+1)^{\gamma+1}(\Gamma(1-\alpha))^\gamma},\quad t\in(t_k,t_{k+1}] \qquad (21)$$

根据脉冲条件容易推出，当 $k=1,2,\cdots$ 时

$$w(t_k^+)=-\eta(t_k^+)\frac{r(t_k^+)\Phi_\gamma((D_-^\alpha y)(t_k^+))}{\Phi_\gamma(G(t_k^+))}\leqslant$$
$$-\eta(t)\frac{r(t)\Phi_\gamma(b_k^*(D_-^\alpha y)(t))}{\Phi_\gamma(G(t))}=$$
$$(b_k^*)^\gamma w(t_k) \qquad (22)$$

应用引理 2，有

$$w(t)\leqslant w(T)\prod_{T<t_k<t}(b_k^*)^\gamma-$$
$$\int_T^t\prod_{T<t_k<s}(b_k^*)^\gamma\Big[\kappa\eta(s)q(s)+$$
$$\frac{r(t)\eta(t)(\psi(t))_+^{\gamma+1}}{(\gamma+1)^{\gamma+1}(\Gamma(1-\alpha))^\gamma}\Big]ds \qquad (23)$$

由式（19）知 $w(t)>0$，而根据条件（18）知当 $t>s\geqslant T,t,s\in(t_k,t_{k+1}],k=1,2,\cdots$ 时式（23）右侧小于零，出现矛盾。因此方程（1）是振动的。证毕。

注 1 使用定理 1 的思想不难证明选择不同的 $\eta(t)$，方程（1）有不同的振动性判断准则。例如选择 $\eta(t)=1,\eta(t)=t^\lambda,t\geqslant t_0,\lambda\geqslant1$，或者 $\eta(t)=R(t,t_0)=\int_{t_0}^t(1/r(s))ds$ 等。

下面给出另一种类型的振动判据。假设在域 $\Omega:=\{(t,s):t\geqslant s\geqslant t_0\}$ 上，存在函数 $H,H'_s\in C^1(\Omega,\mathbf{R})$，满足

$$H(t,t)=0,t\geqslant t_0,H(t,s)>0,$$
$$H'_s(t,s)\leqslant0,t>s\geqslant t_0 \qquad (24)$$

这里记号 H'_s 表示 $\dfrac{\partial}{\partial s}H(t,s)$。

定理 2 假设条件（H1）、（H2）、（H3）和式（5）成立，并且 $b_k^*\leqslant1,k\geqslant k_0$。再假设当 $t>s\geqslant T\geqslant t_0$ 时，存在正的可微函数 $\eta(t),t\in[t_0,\infty)$ 满足

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,T)}\int_T^tH(t,s)\Big[\kappa\eta(s)q(s)-$$
$$\frac{r(s)\eta(s)(\psi(s))_+^{\gamma+1}}{(\gamma+1)^{\gamma+1}(\Gamma(1-\alpha))^\gamma}\Big]ds=\infty \qquad (25)$$

这里 $(\psi(t))_+$ 如定理 1 一样定义，则方程（1）是振动的。

证明 假设方程（1）有一个非振动解 $y(t)$，可同样假设 $y(t)>0,t\geqslant T\geqslant t_0$。根据引理 4，知道 $(D_-^\alpha y)(t)<0,t\in(t_k,t_{k+1}],t_k\geqslant T,k=1,2,\cdots$。沿用定理 1 的证明可得式（21）。用 $H(t,s)$ 乘以式（21）的两边，并在 $t>s\geqslant T,t,s\in(t_k,t_{k+1}],k=1,2,\cdots$ 的情况下做如下积分得

$$\int_T^tH(t,s)\left[\kappa\eta(s)q(s)-\frac{r(s)\eta(s)(\psi(s))_+^{\gamma+1}}{(\gamma+1)^{\gamma+1}(\Gamma(1-\alpha))^\gamma}\right]ds\leqslant$$
$$-\left(\int_T^{t_1}+\int_{t_1}^{t_2}+\cdots+\int_{t_k}^t\right)H(t,s)w'(s)ds$$

根据式（22）的结果使用分部积分法有

$$-\int_{t_{j-1}}^{t_j}H(t,s)w'(s)ds=-H(t,s)w(s)|_{t^+j-1}^{t_j}+$$
$$\int_{t_{j-1}}^{t_j}H'_s(t,s)w(s)ds\leqslant H(t,t_{j-1}^+)w(t_{j-1}^+)-$$
$$H(t,t_j)w(t_j)+\int_{t_{j-1}}^{t_j}H'_s(t,s)w(s)ds\leqslant$$
$$(b_{j-1}^*)^\gamma H(t,t_{j-1})w(t_{j-1})-H(t,t_j)w(t_j)\leqslant$$
$$H(t,t_{j-1})w(t_{j-1})-H(t,t_j)w(t_j)$$

因此

$$\int_T^tH(t,s)\left[\kappa\eta(s)q(s)-\frac{r(s)\eta(s)(\psi(s))_+^{\gamma+1}}{(\gamma+1)^{\gamma+1}(\Gamma(1-\alpha))^\gamma}\right]ds=$$
$$\left\{\int_T^{t_1}+\int_{t_1}^t\right\}H(t,s)\Big[\kappa\eta(s)q(s)-$$
$$\frac{r(s)\eta(s)(\psi(s))_+^{\gamma+1}}{(\gamma+1)^{\gamma+1}(\Gamma(1-\alpha))^\gamma}\Big]ds\leqslant$$
$$H(t,t_0)\left(\int_T^{t_1}\kappa\eta(s)q(s)ds+w(t_1)\right)$$

进一步可推出

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,t_0)}\int_T^tH(t,s)\Big[\kappa\eta(t)q(t)+$$
$$\frac{r(t)\eta(t)(\psi(t))_+^{\gamma+1}}{(\gamma+1)^{\gamma+1}(\Gamma(1-\alpha))^\gamma}\Big]ds\leqslant$$
$$\int_T^{t_1}\kappa\eta(s)q(s)ds+w(t_1)<\infty$$

这和条件（25）相矛盾。命题得证。

注 2 由定理 2 的研究方法不难证明选择不同

的，方程（1）也有不同的振动性判断准则。例如选择 $H(t,s)=(t-s)^m$ 或 $H(t,s)=\left(\ln\frac{t+1}{s+1}\right)^m$ 等。

接下来考虑条件（6）成立的情形。

定理 3　假设条件（H1）、（H2）、（H3）和条件（6）成立并且存在一个正的一阶可微函数 $\eta(t),t\in[t_0,\infty)$ 满足条件（18），进一步假设对任意的常数 $t_1\geqslant t_0$ 有

$$\int_{t_1}^{u}\Big[\prod_{t_1\leqslant t_k<t}(b_i^*)^{\gamma}r(v)\mathrm{e}^{\int_{t_1}^{v}(\theta(s)/r(s))\mathrm{d}s}\Big]^{-\frac{1}{\gamma}}\mathrm{d}v=\infty \tag{26}$$

这里 $\theta(t)=(p(t)+k(\Gamma(1-\alpha))^{\gamma}q(t))$，则方程（1）的解或者振动或者满足 $\lim\limits_{t\to\infty}\int_t^{\infty}(v-t)^{-\alpha}y(v)\mathrm{d}v=0$。

证明　设 $y(t)$ 是方程（1）的一个非振动解，不失一般性，假设 $y(t)>0$ 最终成立。沿用引理 4 的证明，可以得到式（11）成立并且 $(D_-^{\alpha}y)(t)$ 或者最终为正或者最终为负。$(D_-^{\alpha}y)(t)$ 最终为负的情况类似定理 1 的证明在此省略。下面假设 $(D_-^{\alpha}y)(t)$ 最终为正。因此存在 $T_0\geqslant T$ 当 $t\geqslant T_0$ 时有 $(D_-^{\alpha}y)(t)>0$。由式（8）、（10）和式（11）得到 $\lim\limits_{t\to\infty}G(t):=A\geqslant 0$ 及 $G(t)\geqslant A$。现在断言 $A=0$，否则有 $A>0$ 由方程（1）和条件（H3）推知

$$\begin{gathered}(r(t)((D_-^{\alpha}y)(t))^{\gamma})'=\\-p(t)((D_-^{\alpha}y)(t))^{\gamma}+q(t)f\Big(\int_t^{\infty}(v-t)^{-\alpha}y(v)\mathrm{d}v\Big)\geqslant\\-p(t)((D_-^{\alpha}y)(t))^{\gamma}+q(t)k(G(t))^{\gamma}=\\-(p(t)+\kappa(\Gamma(1-\alpha))^{\gamma}q(t))((D_-^{\alpha}y)(t))^{\gamma}\end{gathered}$$

所以

$$(r(t)((D_-^{\alpha}y)(t))^{\gamma})'+\theta(t)((D_-^{\alpha}y)(t))^{\gamma}\geqslant 0 \tag{27}$$

这里 $\theta(t)=(p(t)+\kappa(\Gamma(1-\alpha))^{\gamma}q(t))$，那么在 $(t_k,t_{k+1}],k=1,2,\cdots$ 上，

$r(t)((D_-^{\alpha}y)(t)^{\gamma}\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t}(\theta(s)/r(s))\mathrm{d}s}$ 是严格递增的。由归纳法得

$$\begin{gathered}r(t)((D_-^{\alpha}y)(t))^{\gamma}\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t}(\theta(s)/r(s))\mathrm{d}s}>\\r(t_k^+)((D_-^{\alpha}y)(t_k^+))^{\gamma}\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t_k}(\theta(s)/r(s))\mathrm{d}s}\geqslant\\r(t_k)[b_k^*(D_-^{\alpha}y)(t_k)]^{\gamma}\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t_k}(\theta(s)/r(s))\mathrm{d}s}>\\\prod_{i=1}^{k}(b_i^*)^{\gamma}r(t_1)[(D_-^{\alpha}y)(t_1)]^{\gamma}\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t_1}(\theta(s)/r(s))\mathrm{d}s}\end{gathered} \tag{28}$$

由此可得对于 $t\in[t_1,\infty)$

$$[(D_-^{\alpha}y)(t)]^{\gamma}\geqslant\prod_{t_1\leqslant t_k<t}(b_i^*)^{\gamma}\frac{r(t_1)}{r(t)}e^{-\int_{t_0}^{t_1}(\theta(s)/r(s))\mathrm{d}s}[(D_-^{\alpha}y)(t_1)]^{\gamma} \tag{29}$$

根据式（8）和条件（H3），可以看出

$$\begin{gathered}G'(t)=-\Gamma(1-\alpha)(D_-^{\alpha}y)(t)\leqslant-\Gamma(1-\alpha)\cdot\\\prod_{t_1\leqslant t_k<t}(b_k^*)^{\gamma}\Big[\frac{r(t_1)}{r(t)}e^{-\int_{t_1}^{v}(\theta(s)/r(s))\mathrm{d}s}\Big]^{\frac{1}{\gamma}}[(D_-^{\alpha}y)(t_1)]\end{gathered} \tag{30}$$

记 $L=r(t_1)[(D_-^{\alpha}y)(t_1)]^{\gamma}>0$，对不等式（30）两边积分有

$$\begin{gathered}\int_{t_1}^{u}G'(v)\mathrm{d}v\leqslant-\Gamma(1-\alpha)\cdot\\\prod_{t\leqslant t_k<t}(b_k^*)L^{\frac{1}{\gamma}}\int_{t_1}^{u}[r(v)\mathrm{e}^{\int_{t_1}^{v}(\theta(s)/r(s))\mathrm{d}s}]^{-\frac{1}{\gamma}}\mathrm{d}v\end{gathered} \tag{31}$$

根据条件（26），在式（31）中有 $\lim_{u\to\infty}G(u)=-\infty$，这与 $A>0$ 矛盾。命题得证。

3　例　子

考虑方程

$$\begin{cases}\Big[\frac{1}{t^2}|(D_-^{\alpha}y)(t)|^{\frac{2}{3}}(D_-^{\alpha}y)(t)\Big]'+\\\quad\frac{1}{t^3}|(D_-^{\alpha}y)(t)|^{\frac{2}{3}}(D_-^{\alpha}y)(t)=\\\quad\frac{1}{t^2}\int_t^{\infty}\Big((v-t)^{-\alpha}y(v)\mathrm{d}v\Big)^{\frac{5}{3}},t\neq t_k,\\y(t_k^+)=y(t_k),(D_-^{\alpha}y)t_k^+=\frac{k+1}{k}(D_-^{\alpha}y)(t_k),\\\quad t=t_k:=2k+1,k=1,2,3,\cdots,\\\quad y(0^+)=y_0,(D_-^{\alpha}y)(0^+)=D_-^{\alpha}y_0,\end{cases} \tag{32}$$

这里 $r(t)=q(t)=t^{-2},p(t)=t^{-3},t>0,f(u)=u^{\frac{5}{3}},\gamma=\frac{5}{3}$ 且 $a_k=a_k^*=1,b_k=b_k^*=\frac{k+1}{k}$。不难验证条件（H1）、（H2）、（H3）成立，取 $t\geqslant 2$，因 $(u^{-2}\mathrm{e}^{\int_2^{u}s^{-1}\mathrm{d}s})^{-\frac{3}{5}}=(2u)^{\frac{5}{3}}$，则当 $t\to\infty$ 时

$$\begin{gathered}\int_{t_j}^{t}\prod_{t_j<t_k<u}b_k^*(r(u)\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{u}(p(s)/r(s))\mathrm{d}s})^{-\frac{1}{\gamma}}\mathrm{d}u=\\\int_2^{t}(2u)^{\frac{3}{5}}\prod_{2<t_k<u}b_k^*\mathrm{d}u\to\infty\end{gathered}$$

因此条件（5）被满足。再令 $\eta(t)=t^{\frac{5}{3}}$，则 $\psi(t)=\frac{5}{3}t^{-1}-t$ 且当 $t\geqslant 2$ 时 $(\psi(t))_+=0$，又因为

$$\begin{gathered}\limsup_{t\to\infty}\int_T^{t}\prod_{T<t_k<s}(b_k^*)^{\gamma}\cdot\\\Big[\kappa\eta(s)q(s)-\frac{r(s)\eta(s)(\psi(s))_+^{\gamma+1}}{(\gamma+1)^{\gamma+1}(\Gamma(1-\alpha))^{\gamma}}\Big]\mathrm{d}s=\end{gathered}$$

$$\int_2^\infty \prod_{2<t_k<s}\left(\frac{k+1}{k}\right)^{\frac{5}{3}}\left[\frac{1}{s^2}s^{\frac{5}{3}}\right]\mathrm{d}s \geqslant \int_2^\infty \frac{1}{s^{1/3}}\mathrm{d}s = \infty$$

所以，根据定理1得方程（32）是振动的。

参考文献：

[1] DAS S. Functional fractional calculus for system identification and controls [M]. New York: Springer, 2008.

[2] KILBAS A A, SRIVASTAVA H M, TRUJILLO J J. Theory and applications of fractional differential equations [M]. Amsterdam: Elsevier Science BV, 2006.

[3] DIETHELM K. The analysis of fractional differential equations [M]. Lect Notes Math, 2010.

[4] AGARWAL RAVI P, LAKSHMIKANTHAMA V, NIETO JUAN J. On the concept of solution for fractional differential equations with uncertainty [J]. Nonlinear Analysis, 2010, 72: 2859 – 2862.

[5] ZHOU Y, WANG J R. On the concept and existence of solution for impulsive fractional differential equations [J]. Commun Nonlinear Sci Numer Simulat, 2012, 17 (7): 3050 – 3060.

[6] CHEN D X. Oscillation criteria of fractional differential equations [J]. Advances in Difference Equations, 2012, 33: 1 – 10.

[7] HAN H L, ZHAO Y G, SUN Y, et al. Oscillation for a class of fractional differential equation [J]. Discrete Dynamics in Nature and Society, 2013, 2013(390282): 1 – 6.

[8] ZHENG B, FENG Q H. Some new oscillation criteria for a class of nonlinear fractional differential equations with damping term [J]. Journal of Applied Mathematics, 2013, 2013(912072): 1 – 11.

[9] LU W, GE W G, ZHAO Z H. Oscillatory criteria for third-order nonlinear difference equation with impulses [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2010, 234: 3366 – 3372.

[10] 仉志余，王晓霞，林诗仲，等. 非线性二阶中立型时滞微分方程的振动和非振动准则[J]. 系统科学与数学，2006, 26(3): 325 – 334.

[11] WANG Q R. Oscillation and asymptotics for second-order half-linear differential equations [J]. Applied Mathematics and Computation, 2001, 122: 253 – 266.

[12] LAKSHMIKANTHAM V, BAINOV D D, SIMEONOV P S. Theory of impulsive differential equations [M]. Singapore: World Scientific, 1989.

[13] HARDY G H, LITTLEWOOD J E, POLYA G. Inequalities [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1988.

（上接第42页）

[23] ATANACKOVIĆ T M, KONJIK S, SIMIĆ S. Variational problems with fractional derivatives: Invariance conditions and Noether's theorem [J]. Nonlinear Analy, 2009, 71 (5/6): 1504 – 1517.

[24] LUO S K, LI L. Freactional generalized Hamiltonian mechanics and Poisson conservation law in terms ofcombined Riesz derivatives [J]. Nonlinear Dyn, 2013, 73 (1/2): 639 – 647.

[25] ZHOU S, FU J L, LIU Y S. Lagrange equations of nonholonomic systems with fractional derivatives [J]. Chin Phys B, 2010, 19 (12): 120301.

[26] ZHOU S, FU J L. Symmetry theories of Hamiltonian systems with fractional derivatives [J]. Scientia Sinica Phys, Mech & Astron, 2011, 54 (10): 1847 – 1853.

[27] ZHANG Y, ZHOU Y. Symmetries and conserved quantities for fractional action-like Pfaffian variational problems [J]. Nonlinear Dyn, 2013, 73 (1/2): 783 – 793.

[28] 张毅. 相空间中类分数阶 Noether 对称性与守恒量 [J]. 中山大学学报：自然科学版，2013，52（4）：20 – 25.

[29] LONG Z X, ZHANG Y. Fractional Noether theorem based on extended exponentially fractional integral [J]. Int J Theor Phys, 2014, 53 (3): 841 – 855.

[30] CHEN J, ZHANG Y. Perturbation to Noether symmetries and adiabatic invariants for disturbed Hamiltonian systems based on El-Nabulsi nonconservative dynamics model [J]. Nonlinear Dyn, 2014, 77, 353 – 360.

[31] LONG Z X, ZHANG Y. Fractional action-like variational problem and its symmetry for a nonholonomic system [J]. Acta Mech, 2014, 225 (1): 77 – 90.

[32] 龙梓轩，张毅. 基于按正弦周期拓展的分数阶积分的类分数阶 Noether 定理 [J]. 中山大学学报：自然科学版，2013，52（5）：51 – 56.

[33] 丁金凤，张毅. 基于按指数律拓展的分数阶积分的 El-Nabulsi-Pfaff 变分问题的 Noether 对称性 [J]. 中山大学学报：自然科学版，2014，53（5）：12 – 16.